**Méthodes numériques pour les EDP**

TP2: Équation de transport

HE Bingran

P1613119

Département Mécanique, Université Claude Bernard Lyon 1

1. Problème physique

On considère le problème de l'advection d'une impulsion acoustique; le champ de pression est initialement :

Pour la continuité de la pression initiale et ses dérivées par rapport à , on met (k/2), et. Enfin, pour obtenir une impulsion utile, on utilisera.

Pour la propagation on peut utiliser l’équation de transport,

Ou est la pression et est la vitesse du son.

Sur un domaine, les conditions au limites sont : et .

1. **Solution analytique**

La solution générale de ce type de problème avec , s’écrit sous la forme :

avec

Alors,

Expliquer pourquoi on peut remplacer ici l'équation des ondes par l'équation de transport - cela correspond a quelle hypothèse?

On considère la propagation d’une onde sonore plane dans tube de longueur 2L contenant un milieu au repos de densitéet de pression. Le milieu est perturbé à l’instant initial par une fluctuation de pression w(x) ne dépendant que de la direction spatiale x et sans vitesse initial. La densité, la pression et la vitesse du milieu perturbée sont solutions des équations de conservation d’Euler, qui décrivent la dynamique d’un gaz non visqueux. En supposant que les perturbations sont faibles (hypothèse de

l’acoustique), l’équation de conservation de la masse s’écrit au premier ordre :

De même l’équation de conservation de la quantité de mouvement s’écrit au premier ordre :

Les fluctuations étant faibles, on peut supposer l’écoulement isentropique :

De ces relations on en déduit un système d’équations hyperbolique sur et :

En dérivant la première équation par rapport à t et la seconde par rapport à x, on obtiens par différence l’équation des ondes pour la fluctuation de pression p :

1. **Méthodes numériques**

On fait une simulation numérique a l’aide de 3 schéma : le schéma de Courant, le schéma de Lax-Wendro, le schéma `leap-frog' (Saute-Mouton).

* 1. **Schéma de Courant**

Le schéma s'écrit sous la forme suivante :

On introduise et , alors :

avec , il est complexe.

Pour la stabilité, il faut. On peut trouve que

Pour la consistance, .Donc il est consistance d’ordre .

Or dans l’expression de l’erreur troncature,

avec

La diffusion numérique est . Si , .

* 1. **Schéma de Lax-Wendroff**

On introduise et , alors :

Pour la stabilité :

Il est complexe, pour la stabilité, il faut. Donc :

Comme, on peut trouve que

Pour la consistance :

Le schéma de lax-wendroff est consistant d’ordre(). Et le terme est la dispersion, avec le coefficient de .

* 1. **Schéma `leap-frog' (Saute-Mouton).**